

Szigorlat

LA - DM

80-32

1, Gauss-elimináció

$$\begin{aligned} 1, \quad x + y - z &= 9 \\ -2x + y + z &= 1 \\ x - 3y + z &= -17 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -17 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & 19 \\ 0 & -4 & 2 & -26 \end{array} \right]$$

$\text{II} + 2\text{I}$
 $\text{III} - \text{I}$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & 19 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right]$$

$\text{II} + 3\text{III}$
 $\text{I} \leftrightarrow \text{II}$

$$\begin{aligned} 2z &= -2 & -y + z &= -7 & x + y - z &= 9 \\ z &= -1 & & & & \\ & & -y &= -6 & x &= 2 \\ & & y &= 6 & & \end{aligned}$$

$\rightarrow$ ha van tilos sa, akkor nincs megoldás
ha több változó van, mint egyenlet, akkor nincs egyen-
telmű mc.
ha az egyenletek egymáshoz számcsoporthoz tartoznak, akkor
végtelen megoldás

$$\begin{aligned} 2, \quad 3x + py &= 5 \\ -2x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & p & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 3 & p & 5 \end{array} \right] \rightarrow$$

$\text{II} : 2$
 $\text{I} \leftrightarrow \text{II}$ $\text{II} + 3\text{I}$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & p+6 & 8 \end{array} \right]$$

① $p+6 \neq 0$
 $p \neq -6 \Rightarrow \exists$ megoldás

$$\begin{aligned} (p+6)y &= 8 \\ y &= \frac{8}{p+6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1 \\ -x + \frac{16}{p+6} &= 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad p + 6 = 0 \\ p = -6 \rightarrow \text{tilos az} \neq \text{mó}$$

Vektor megadása másképp:

$$1, \quad \underline{b}_1 (-1, 1) \quad \underline{b}_2 (0, -4)$$

$$A_{\{b\}}(8, 5) \quad A_{\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}} = ?$$

$$A = \alpha \underline{b}_1 + \beta \underline{b}_2$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$8\mathbf{i} + 5\mathbf{j} = \alpha(-1\mathbf{i} + 1\mathbf{j}) + \beta(0\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$$

$$8 = -\alpha + 0\beta \Rightarrow \alpha = -8$$

$$5 = \alpha - 4\beta$$

$$13 = -4\beta$$

$$-\frac{13}{4} = \beta$$

$$A_{\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -\frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

Skalár szorzat

$$1, \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \angle = ?$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \angle$$

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = -2 - 3 + 8 = 3$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \quad |\underline{b}| = \sqrt{1 + 1 + 64} = \sqrt{66}$$

$$\frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{66}} = \cos \angle$$

$$\angle = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{66}}\right) = 84,33^\circ$$

2, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ Milyen merőleges a két vektor?
 $\rightarrow \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 + 10 - a = 12 - a = 0$$

$$\underline{a} = 12 \text{ esetén}$$

3, Mekkora a két sík által bezárt szög?

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 8 \\ 5x - y + 3z &= 6 \end{aligned} \quad \underline{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{n}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = 15 - 4 - 3 = 8$$

$$|\underline{n}_1| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26} \quad |\underline{n}_2| = \sqrt{25 + 1 + 9} = \sqrt{35}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{35}}\right) = 74,6^\circ$$

4, Adja meg az $\underline{a}$ vektor $\underline{b}$ -re vetített merőleges vetületének hosszát

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 6,3 \\ 2,8 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3,3 \\ 4,4 \\ 2,1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram showing vector } \underline{a} \text{ and its projection } x \text{ onto vector } \underline{b}. \end{array} \quad x = ?$$

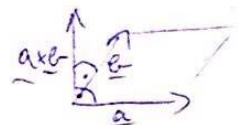
$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 8,25 + 27,72 + 16,38 = 52,35$$

$$x = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|} = 8,89$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{10,89 + 19,36 + 4,41} = \sqrt{34,66}$$

Vektoriális szorzat

1, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\underline{a} \times \underline{b} = ?$
 $= |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \alpha \cdot \underline{e}$



$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 13 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \underline{i}(-41) - \underline{j}(-66) + \underline{k}(-29) = \begin{pmatrix} -41 \\ 66 \\ -29 \end{pmatrix}$$

2, Adja meg a következő pontok által határozott sík
logaritmus ténylegét

$$A(2,3,5) \quad B(5,3,5) \quad C(6,6,5) \quad D(3,6,5)$$

$$T = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

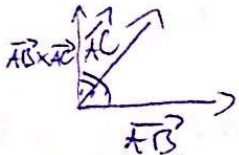
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = |0j - 0k + 9i| = \sqrt{0+0+81} = \underline{\underline{9}}$$

3, Adott egy sík három pontja, adja meg a sík
egyenletét

$$A(2,4,8) \quad B(0,3,6) \quad C(3,7,10)$$

$$Ax + By + Cz = 0 \quad \text{ kell egy normálvektor}$$



$$\underline{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + (-5 \cdot 8) = -24$$

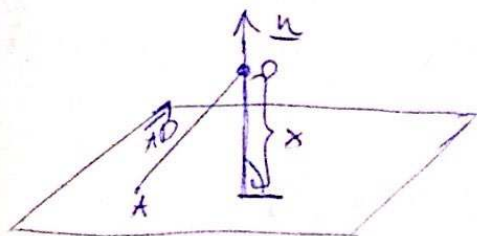
$$4x + 2y - 5z = -24$$

Rajta van-e a $D(4,9,1)$ pont a síkon

$$4 \cdot 4 + 2 \cdot 9 - 5 \cdot 1 \stackrel{?}{=} -24$$

$$29 \neq -24 \quad \text{nincs rajta}$$

4, Mekkora az adott sír és egy pont távolsága?



$$A(2, 2, 2)$$

$$D(10, 6, 8)$$

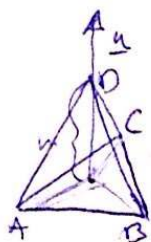
$$B(3, 4, 5)$$

$$C(8, 6, 4)$$

$$\underline{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

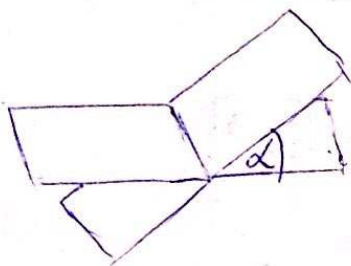
$$x = \frac{\vec{AD} \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|}$$

5, Tetraéder egyik csúcsára hurot magasság?



$$m = \frac{\vec{AD} \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|}$$

6, Adott két sír, mekkora az általuk bezárt szög?



$$2x + 3y - z = 2$$

$$x - 5y + 2z = 8$$

$$\underline{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

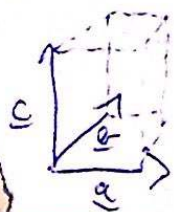
$$\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = |\underline{n}_1| \cdot |\underline{n}_2| \cdot \cos \alpha$$

Vegyes szorzat

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} \rightarrow (|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \alpha) \cdot |\underline{c}| \cdot \cos \beta$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

1, Adott egy paralelepipedon, mekkora a térfogata?



$$V = |(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}| = |\underline{d} \cdot \underline{c}| = 8$$

$$\underline{a}(12, 16, 20)$$

$$\underline{b}(8, 10, 12)$$

$$\underline{c}(9, 18, 27)$$

Matric algebra

1, Inverse matrix

$$\underline{\underline{A^{-1}}} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(\underline{\underline{A}})$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 3 + 2(-1) = 1$$

$$\text{adj}(\underline{\underline{A}}) = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A^{-1}}} = -11$$

2, Egyenletrendszer megoldása

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}} \rightarrow \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A^{-1}}} \cdot \underline{\underline{b}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 4$$

$$x - 3y = 7$$

$$2x - 2y = -2$$

$$\underline{\underline{A^{-1}}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{x}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3, Cramer szabály segítségével

$$\underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

$$\underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{8}{8} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{8} = -2$$

$$\underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sajátérték, Sajátvektor

Készítve: 2023. 03. 26.

1, adja meg a mátrixhoz tartozó sajátértékeket, sajátvektorokat!

$$\det[A - \lambda E] = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)] + 2 \cdot (1-\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10$$

polinom osztás:

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 : \lambda - 1 = -\lambda^2 + 7\lambda - 10$$

$$\underline{-\lambda^3 + \lambda^2}$$

$$7\lambda^2$$

$$\underline{7\lambda^2 - 7\lambda}$$

$$-10\lambda$$

$$\underline{-10\lambda + 10}$$

$$0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(-1)(-10)}}{-2} = \frac{-7 \pm 3}{-2} \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ x &= -z \end{aligned}$$

$$y + 2z = 0$$

$$y = -2z \quad 1 \text{ dim}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot p, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x + 2z = 0$$

$$x = -2z$$

$$-y = 0$$

$$y = 0 \quad 1 \text{ dim}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q, \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda_3 = 5$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$2y = 0$$

$$y = 0 \quad 1 \text{ dim}$$

$$x + y - z = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r, \quad r \in \mathbb{R}$$

SB, SV transzfomáció

Generátormendse

1, Az adott vektorok gen. ns-t / bázist alkotnak-e?

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad g_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad g_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Gauss-alg. ... $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 6 & b \\ -1 & 2 & 5 & 1 & -4 & c \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & \frac{2a-b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4a+b}{6} \end{array} \right]$

Gen. ns?

$$\Leftrightarrow \exists m.o. \quad \checkmark$$

Tehát Gen. ns?

$$\Leftrightarrow \nexists \text{ teljes sz.} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \nexists \text{ csupa nulla sor az eh. mátrixban} \quad \checkmark$$

Bázis

$$\Leftrightarrow \text{Gauss el. fgt} \rightarrow \det(M) \neq 0$$

1. módszer -

2. módszer váltó -

3. módszer $\exists$ inverz elem -

lin. leképezés mátrixa

1, az sírba tükrözés

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} T(i) &= i & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ T(j) &= -j & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ T(k) &= k & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2, $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

(1) tükrözés az xy síkra

$$T(i) = i \rightarrow 2i \rightarrow 0i \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) retszelvény

$$T(j) = j \rightarrow 2j \rightarrow 2j \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) vetítés az yz síkra

$$T(k) = -k \rightarrow -2k \rightarrow -2k \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Basis transformáció

Rege

Új bázis a réndulási térben (új, ré)

$$1, A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$u_j: a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

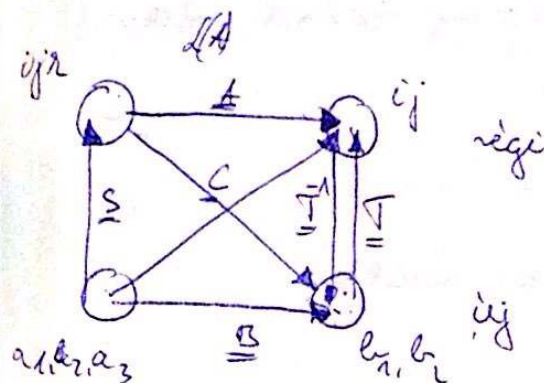
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Régi a képtérben (új)

$$u_j: b_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_2 \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$



$$u_j \rightarrow u_j \quad B$$

$$\det(T) = 1 \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot u = T^{-1} \cdot A \cdot S \cdot u$$

régi $\rightarrow$ új

$$B \cdot u = A \cdot T^{-1} \cdot u$$

új $\rightarrow$ régi

$$C = A \cdot S \cdot u$$

$$2, A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{[q_1, q_2]} = ?$$

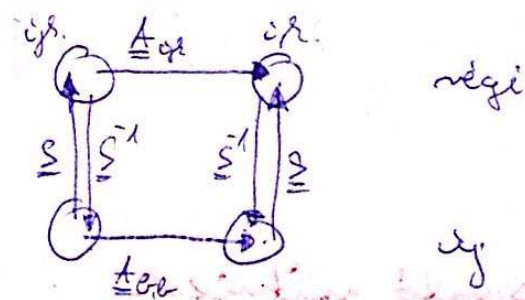
$$b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$u \cdot A_{[q_1, q_2]} = S \cdot A_{[q_2]} \cdot S^{-1} \cdot u$$



Homogén lin. der.

Képtér, Magter

Diagonalizálható, diagonalizálhatóság

1, Diagonalizálható

→ ha a sajátértékek különbözőek

→ ha $\forall$ s-e-nek az algebrai és geom.-i multip.-a megegyezik
(hány szabad változó)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda) - (-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 2, 3 \quad \checkmark \text{diag. hato}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -x + y = 0 \\ x = y \end{matrix} \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot p, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -2x + y = 0 \\ y = 2x \end{matrix} \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot q, \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Hasonló mátrixok

$A \sim B$, ha $\exists C$, melyre

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C$$

Hasonló mátrixok se-meggyeznek!

1, Mely mátrixok lehetnek hasonlóak

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$A \sim D$$

Kvadrátikus alakzat

1, Határozzuk meg a kvad. alakzat tartozó mátrixát és annak diagonális alakját

$$Q(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (-2-2)^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

diagonális alak

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Q(x, y) = -x^2 - 3y^2 = -1$$

$$x^2 + 3y^2 = 1$$

-Félszegely transzformáció

$$2, Q(x, y) = 27x^2 - 18xy + 3y^2 = 3$$

$$9x^2 - 6xy + y^2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(9-\lambda)(1-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 9 - 9 = \lambda(\lambda - 10) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

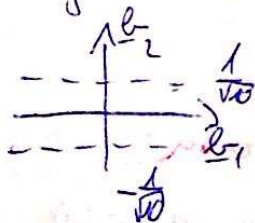
$$\lambda_2 = 10$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 10y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{10} \rightarrow y_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\rightarrow$ az új bázisban



Ortogonalizált bázisra van szükségünk

$$\lambda_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 & | & 0 \\ -3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$-3x + y = 0$$

$$3x = y$$

$$\underline{e}_1 = \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot r, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$|\underline{e}_1| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 10$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & | & 0 \\ -3 & -9 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$-x - 3y = 0$$

$$x = -3y$$

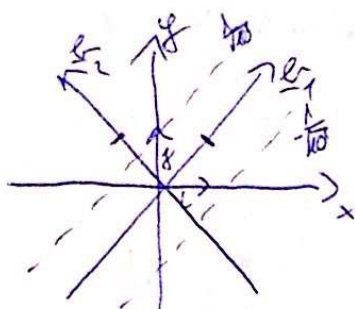
$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q, \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$|\underline{e}_2| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

A négy bázisban



Kvadrátikus alakok osztályozása

- poz. definit $\forall x \neq 0 \quad Q(x) > 0$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda_i > 0$$

- poz. semidefinit $Q(x) \geq 0$

$$\exists y \quad Q(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda_i \geq 0 \text{ és } \exists \lambda_i > 0$$

- indefinit $\exists x \quad Q(x) > 0$

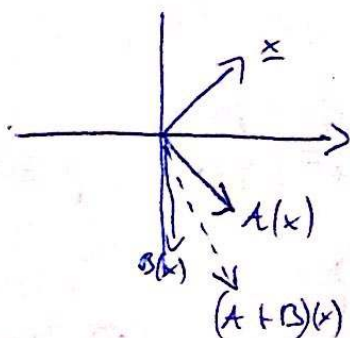
$$\exists y \quad Q(y) < 0$$

$$\exists \lambda_i < 0 \text{ se.}$$

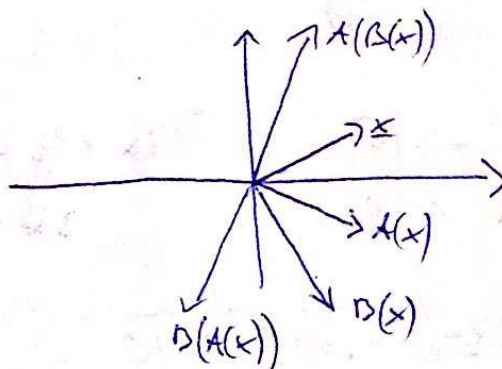
$$\exists \lambda_j > 0 \text{ se.}$$

Lineáris leképezések összege, számorzása

1,



2,



Komplex Scanner

$$1, z^2 - (2+3i)z - (1+3i) = 0 \quad z \in \mathbb{C}$$

$$1, z = \frac{(2+3i) \pm \sqrt{(2+3i)^2 - 4 \cdot (-1-3i)}}{2} = \frac{2+3i \pm \sqrt{4+12i+4-12i}}{2} = \frac{2+3i \pm \sqrt{-1}}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2+3i+i}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \\ \frac{2+3i-i}{2} = 1+i \end{cases}$$

$$2, (2+i) \cdot z^3 - 8 = 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$(2+i) \cdot z^3 - 8 = 16\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$(2+i) \cdot z^3 - 8 = -16 + 16i$$

$$(2+i) \cdot z^3 = -8 + 16i$$

$$z^3 = \frac{-8+16i}{2+i}$$

$$z^3 = \frac{-8+16i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{-16+32i+8+16}{5} = \frac{40i}{5} = 8i$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = 8$$

$$z = \sqrt[3]{8i}$$

$$8i = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$z = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)$$

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right)$$

$$3, z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{8}i \quad z_2 = 1-i \quad \frac{z_1^2 \cdot z_2^9}{i^{17}} = ?$$

$$z_1^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{8}i)^2 = 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{8}i + 8 = -6 - 8i$$

$$z_2 = 1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2^9 = \sqrt{2}^9 \cdot \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = 16\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 16 + i16$$

$$i^{17} = i^{16+1} = i^{16} \cdot i = 1 \cdot i = \underline{i}$$

$$\frac{z_1^2 + z_2^2}{i} = \frac{-6 - 8i + 16 + 16i}{i} = \frac{10 + 8i}{i}$$

$$4, \quad z(x+i) - \bar{z}(1-i) = 2i$$

$$z = a + bi$$

$$3\sqrt[3]{1} = 3\sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3}$$

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

Skalariszorlat

→ pozitív definit

→ szimmetrikus

→ bilineáris → kvadrát-forma homog. és lin.

1, $\mathbb{R}$ feletti legfeljebb 2. fokú polinomok

$$\langle f, g \rangle = f(1)g(1) + f'(1)g'(1) + f''(1)g''(1)$$

$$\langle f, g \rangle = f(1)^2 + f'(1)^2 + f''(1)^2 > 0$$

$$\langle f, g \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \text{poz. def.}$$

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \quad \checkmark \quad \text{szimmetria.}$$

$$\langle f_1 + f_2, g \rangle = \underbrace{(f_1(1) + f_2(1))}_{(f_1 + f_2)(1)} \cdot g(1) + \underbrace{(f_1'(1) + f_2'(1))}_{(f_1' + f_2')(1)} \cdot g'(1) + \dots \quad \text{lineár}$$

$$= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$$

Valóban
Skalariszorlat

$$\langle \lambda f, g \rangle = \lambda f(1)g(1) + \lambda f'(1)g'(1) + \lambda f''(1)g''(1) = \lambda \langle f, g \rangle$$

2, Adottak: 1 , $x-1$, $\frac{(x-1)^2}{2}$

Bizonyítsa be, hogy OVB- 2 -t alkotnak

→ lin fgt.

→ egy hásszal

→ merőlegesek

$$① \quad \lambda \cdot 1 + \beta(x-1) + \gamma \frac{(x-1)^2}{2} = 0$$

$$\text{lin fgt} \Leftrightarrow \lambda = \beta = \gamma = 0$$

$$\lambda + \beta x - \beta + \frac{\gamma x^2}{2} - \gamma x + \frac{\gamma}{2} = 0$$

$$x^2 \cdot \frac{\gamma}{2} + x(\beta - \gamma) + (\lambda - \beta + \frac{\gamma}{2}) = 0$$

$$\frac{\gamma}{2} = 0 \rightarrow \gamma = 0$$

$$\beta - \gamma = 0 \rightarrow \beta = 0$$

$$\lambda - \beta - \frac{\gamma}{2} = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

} lin.
Fgt- 2

② Merőlegesek

$$\langle 1, x-1 \rangle = 1(1-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$\langle 1, \frac{(x-1)^2}{2} \rangle = 1 \frac{(1-1)^2}{2} + 0(1-1) + 0 \cdot 1 = 0$$

$$\langle x-1, \frac{(x-1)^2}{2} \rangle = (1-1) \cdot \frac{(1-1)^2}{2} + 1(1-1) + 0 \cdot 1 = 0$$

③ Normáltak.

$$\|1\| = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 + 0} = 1$$

$$\|x-1\| = \sqrt{(1-1)^2 + 1^2 + 0} = 1$$

$$\|\frac{(x-1)^2}{2}\| = \sqrt{\left(\frac{(1-1)^2}{2}\right)^2 + (1-1)^2 + 1^2} = 1$$

Norma

- poz. def.
- lineáris
- Δ egyenlőtlenség

$$1, \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\textcircled{1} \sum |x_i + y_i| \leq \sum |x_i| + |y_i| = \sum |x_i| + \sum |y_i| = \|x\| + \|y\|$$

$$\textcircled{2} \|x\| \geq 0 \quad \sum |x_i| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 = \sum |x_i| \Leftrightarrow x = \underline{0}$$

$$\textcircled{3} \|\lambda x\| = \sum |\lambda x_i| = \sum |\lambda| \cdot |x_i| = |\lambda| \sum |x_i| = |\lambda| \|x\| \quad \checkmark$$

Metrika

- poz. def.
- szimmetrikus
- Δ egyenlőtlenség

$$1, d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

x, y ONB vektora

$$\|x\| = \|y\| = 1$$

$$\langle x, y \rangle = 0$$

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\underbrace{\langle x, x \rangle}_1 - \underbrace{\langle x, y \rangle}_0 - \underbrace{\langle y, x \rangle}_0 + \underbrace{\langle y, y \rangle}_1} = \sqrt{2}$$

Gram-Schmidt Ortogonalizáció

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = w_1$$

$$v_2 = w_2 + k_{21} v_1$$

$$k_{21} = \frac{\langle w_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

$$\underline{v}_3 = \underline{w}_3 - \frac{\langle \underline{w}_3, \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{v}_1\|^2} \underline{v}_1 - \frac{\langle \underline{w}_3, \underline{v}_2 \rangle}{\|\underline{v}_2\|^2} \underline{v}_2$$

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + -\frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -18 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{14} \rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}$$

Komplex Euklidestriumen

1, Komplex Skalarprodukt

→ pos.-def.

→ Hermit.

→ bilinear.

A-töbli na.

Specialis Matricok

$\mathbb{R}^n$ -ben

szimmetrikus

$$A^T = A$$

antiszimmetrikus

$$A^T = -A$$

ortogonális

$$A^T = A^{-1}$$

$\mathbb{C}^n$ -ben

hermitikus

$$\overline{A}^T = A$$

ferden hermitikus

$$\overline{A}^T = -A$$

unitár

$$\overline{A}^T = A^{-1}$$

szel

valós

reprezentáció
valós
als = 1

1, Milyen spec. mátrix?

$$A = \begin{bmatrix} 3i & 2+i \\ -2+i & -i \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -3i & 2-i \\ -2-i & +i \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}^T = \begin{bmatrix} -3i & -2-i \\ 2-i & i \end{bmatrix} = -A \quad \text{ferden hermitikus}$$

$$\begin{vmatrix} 3i-\lambda & 2+i \\ -2+i & -i-\lambda \end{vmatrix} = (3i-\lambda)(-i-\lambda) - (2+i)(-2+i) = \lambda^2 + \lambda(-2i) + 3 - (-4 + 2i - i - 1) \\ = \lambda^2 - 2i\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{2i \pm 6i}{2} = \begin{matrix} 4i \\ -2i \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\frac{2i \pm 6i}{2}} \right\} \text{csak reprezentáció}$$

Merőleges részre is átlát

$$V = \mathbb{R}^5$$

$$v = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$$

$$1, W_1 = \{v \in V \mid v_1 = v_2 = 0\} \rightarrow \dim(W_1) = 3$$

$$W_1^\perp = ?$$

$$w \in W_1^\perp$$

$$w \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

$$\dim(W_1) + \dim(W_1^\perp) = 5$$

$$\langle w, v \rangle = 0$$

$$\underbrace{v_1 a}_0 + \underbrace{v_2 b}_0 + v_3 c + v_4 d + v_5 e = 0$$

$$2 \text{ szabad vált.} \rightarrow \dim(W_1^\perp) = 2$$

$$(1) v_3 = 1 \quad v_4 \neq v_5 = 0 \quad c = 0$$

$$(2) v_4 = 1 \quad v_3 = v_5 = 0 \quad d = 0$$

$$(3) v_5 = 1 \quad v_3 = v_4 = 0 \quad e = 0$$

$$W_1^\perp = \{v \in V \mid v_3 = v_4 = v_5 = 0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$2, W_2 = \{v \in V \mid v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5\}$$

$$W_2^\perp = ?$$

$$\dim(W_2) = 1 \quad \dim(W_2^\perp) = 4$$

$$v_1 a + v_2 b + v_3 c + v_4 d + v_5 e = 0$$

$$a + b + c + d + e = 0$$

v_1 lehet 1

$$W_2^\perp = \{v \in V \mid v_1 = -v_2 - v_3 - v_4 - v_5\}$$

$W_2^\perp$ bázisa:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrix rangje

$Ax = b$ megoldható, ha $\text{rang}(A) = \text{rang}([A|b])$

$$1) \quad x + 2y + 2z = 5$$

$$3x + 7y + 5z = 12$$

$$x + 3y + az = b + 5$$

Gaussolva
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-1 & b+3 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad \text{rang}(A) = \text{rang}([A|b]) = 2$$

$$a-1=0 \rightarrow a=1$$

$$b+3=0 \rightarrow b=-3$$

∞ mo.

$$(2) \quad \text{rang}(A) = \text{rang}([A|b]) = 3$$

$$a-1 \neq 0 \quad a \neq 1 \quad 1 \text{ mo.}$$

Kombinatorika

1, 14 táncos körben áll,

$$\rightarrow \frac{14!}{14} = (14-1)! = 13!$$

a két legmagasabb áll egymás mellett

$$12! \cdot 2$$

2, adott egy 5 sávos sávszél, van 7 szín, 4 más szín

$$\binom{7}{5}$$

b, egyfennmar is lehetnek

$$7^5$$

3, 3 díj, 57 megjelölés $\rightarrow$ 3-at választunk, ismétel

$$\binom{57}{3}$$

4, 52 lap, 4-et választunk

a, két színű

$$13^4$$

b, két szín és figura

$$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = \frac{13!}{9!}$$

5, 26 betű, 10 szám

a, 2 betű 4 szám ismétlődhet

$$26^2 \cdot 10^4$$

b, nem ismétlődhet

$$\binom{26}{2} \cdot \binom{10}{4}$$

6, 4 lány, 4 fiú, két férfi

a, két oldalra ahova akar

$$\binom{8}{4}$$

b, 4 pár van

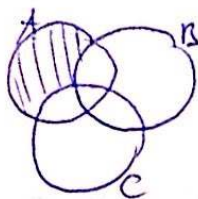
$$\binom{4}{2}$$

c, 4 két rocsiban ül két fiú, két lány

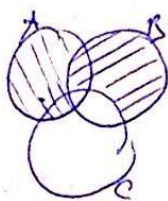
$$\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$$

Kalmazalgebra

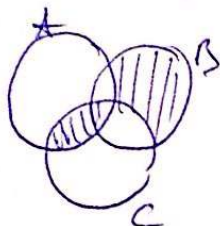
1, $(A \setminus B) \setminus C$



$(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

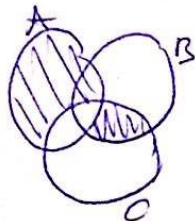


2,



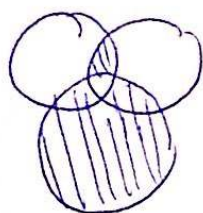
$A \cap C \cup (B \setminus (A \cup C))$

3,



$A \setminus C \cup ((B \cap C) \setminus A)$

4,



$[C \cup (A \cap B)] \setminus (A \cap B \cap C)$

Szita formula

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

1, Adott három csoport

K	F	T
34	49	26

Tudjuk, hogy

F-K

13

F-T

8

K-T

9

F-KT

2

→ metszet

Kéinyan vanal összesen

⇒ 81

Kétaldali Tartalmazás

1, $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

$$x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ és } x \notin C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ vagy } x \in B \text{ és } x \notin C \Leftrightarrow (x \in A \text{ és } x \notin C)$$

$$\text{vagy } (x \in B \text{ és } x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

2, $[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$x \in [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \text{ és } x \in C \Leftrightarrow [x \in \{(A \setminus B) \text{ vagy } x \in (B \setminus A)\}] \text{ és } x \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ és } x \notin B) \text{ vagy } (x \in B \text{ és } x \notin A) \text{ és } x \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ és } x \notin B \text{ és } x \in C) \text{ vagy } (x \in B \text{ és } x \notin A \text{ és } x \in C)$$

$$\underbrace{* \quad x \in A \text{ és } x \in C}$$

$$\underbrace{x \in B \text{ és } x \in C}$$

$$\Leftrightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Bináris relációk

1, $H = \mathbb{R}^+$ $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{a} \rightarrow \text{Milyen reláció}$$

a és b pozitívak, ezért $a^2 \leq b^2$

- $(a, a) \in R \Rightarrow a^2 \leq a^2 \checkmark$ reflexív

- $(a, b) \in R$
 $(b, c) \in R \left\{ \begin{array}{l} a^2 \leq b^2 \\ b^2 \leq c^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (a, c) \in R \\ a^2 \leq c^2 \end{array} \right\} \checkmark$ tranzitív

- $(a, b) \in R$
 $(b, a) \in R \left\{ \begin{array}{l} a^2 \leq b^2 \\ b^2 \leq a^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \checkmark$ antiszimmetria

Rendezési reláció

2, $M = P(\{1, 2, 3\})$

$(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B$

- $(A, A) \in R \Leftrightarrow A \subseteq A \checkmark$ reflexív

- $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B$
 $(B, C) \in R \Leftrightarrow B \subseteq C \left\{ \begin{array}{l} A \subseteq C \checkmark \\ (A, C) \in R \end{array} \right\}$ tranzitív

- $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B$
 $(B, A) \in R \Leftrightarrow B \subseteq A \left\{ \begin{array}{l} A = B \checkmark \end{array} \right\}$ antiszimmetria

$\Rightarrow$ Rendezési reláció

Nulladrendű logika

1, Bizonyítsa igazságtáblával: $(A \cup B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

A	B	$(A \cup B)$	A	$(\neg A)$	V	$(\neg B)$	
1	1	1	1	0	1	0	
1	0	1	1	0	0	1	$\rightarrow$ téves
0	1	1	0	1	1	0	$\rightarrow$ téves
0	0	0	0	1	0	1	

2, Teljes KNF-ne alakítás

independent set

$$\begin{aligned}(A \vee B) \rightarrow (\neg C \wedge D) &\equiv \neg(A \vee B) \vee (\neg C \wedge D) \equiv (\neg A \vee \neg B) \vee (\neg C \wedge D) \equiv \\ &\equiv [(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C] \wedge [(\neg A \wedge \neg B) \vee D] \equiv (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge \\ &\wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee D)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b, \neg \{ (A \rightarrow B) \rightarrow [(C \vee A) \rightarrow (C \vee B)] \} &\equiv \neg \{ (\neg A \vee B) \vee [\neg(C \vee A) \vee (C \vee B)] \} \\ &\equiv \neg (\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg [(\neg C \wedge \neg A) \vee (C \vee B)] \equiv (\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg C \wedge \neg A) \wedge \\ &\neg(C \vee B) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (C \vee A) \wedge \neg C \wedge \neg B\end{aligned}$$

3, Bizonyítsuk be, hogy $(A \rightarrow B) \vee (A \wedge \neg B)$ tautológia

$$\neg \{ (\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B) \} \equiv A \wedge \neg B \wedge (\neg A \vee B)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \swarrow \\ \square \quad \neg A \quad \swarrow \\ \square - \text{még} \Rightarrow \text{kontrad.} \quad \checkmark \end{array}$$

4, A, B, C Következtetés B

$$(A \wedge B) \rightarrow C \equiv \neg(A \wedge B) \vee C$$

$$C \rightarrow (A \vee B) \equiv \neg C \vee A \vee B$$

$$A \rightarrow \neg C \equiv \neg A \vee \neg C \quad \square \quad \text{kontr.}$$

$$A \vee B \vee C \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$$

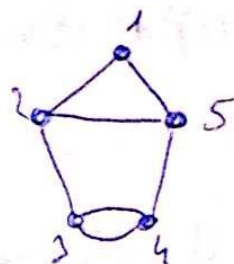
$$\neg A$$

$$A \vee C$$

Grafok Matrikái

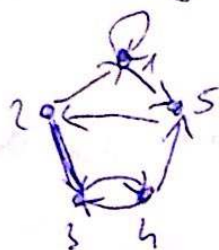
1, Szomszédssági matrikák

a, irányítatlan



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	2	0
4	0	0	2	0	1
5	1	1	0	1	0

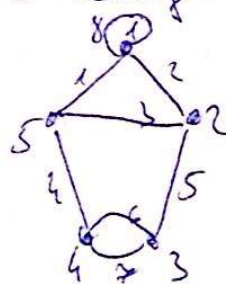
b, irányított esetben



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1
3	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0

2, Illeszkedési matrikák

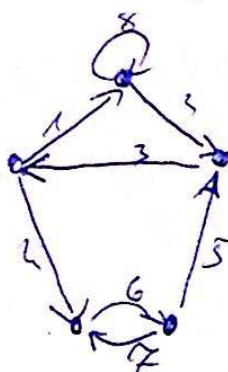
a, irányítatlan



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	0	0	0	0	0	1
2	0	1	1	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	1	0
4	0	0	0	1	0	1	1	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0

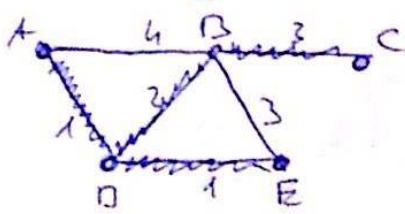
b, irányított

-1 ha nincs, 1 ha van



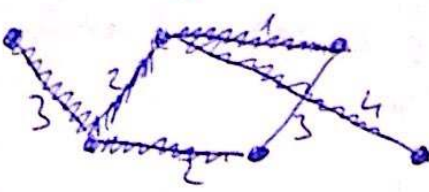
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	-1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	-1	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	-1	1	-1	0
4	0	0	0	1	0	-1	1	0
5	-1	0	1	-1	0	0	0	0

Kruskal algoritmus



- > min súlyú feszítő fa
- súly sorrend növelve
- > sorban válogatunk, amíg nincs kör
- 1, 1, 2, 3, 3, 4
- = ha n-1 megegyen akkor kész

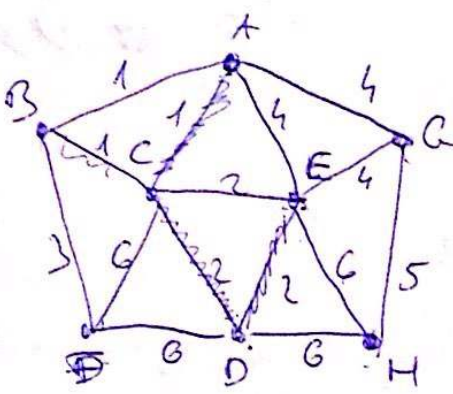
Prim algoritmus



- > min súlyú feszítő fa
- a bekapott fa által fedett csúcsokból kikerülő élek közül a legkisebb, ha nem alkot kör

Dijkstra algoritmus

E-től H-ig



- > valamilyen csúcsból más csúcsokba vezető legrövidebb út

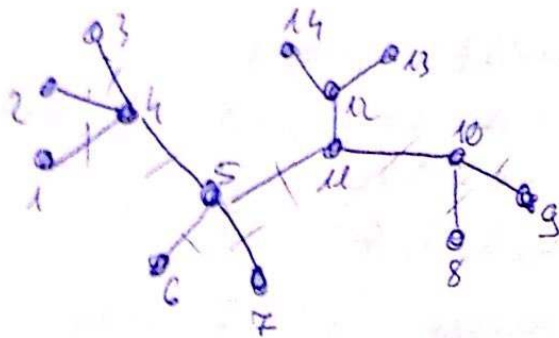
- a nem S-beli csúcsok közül választunk egy min. távolságra elérhető csúcsot és annak partit

$$S = \{E, D, C, A, B, G, F, H\}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
E	4	-	2	(2)	-	4	-	-
D	4	-	(2)			4	6	
C	(3)	3				8	4	6
A		(3)				8	4	6
B						6	(4)	6
G						6		(6)
H						(6)		
F								

E-től H-ig 6-tal

Pmíjen - ród



4, 4, 4, 5, 5, 5, 11, 10, 10, 11, 12, 12 } 12 $\Rightarrow$ 14 esik ki
mics a ródban

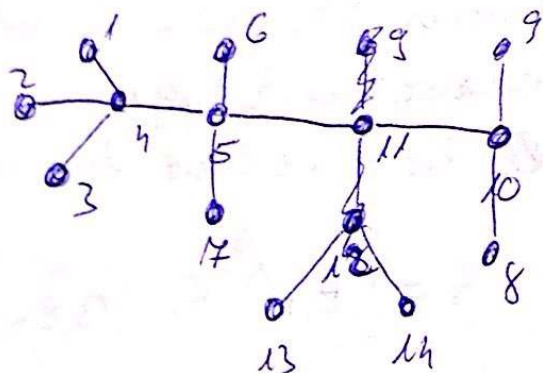
1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 13, 14 over leveler

Visszafelé

4, 4, 4, 5, 5, 5, 11, 10, 10, 11, 12, 12

mics 12, 13, 14, 13, 14

4 5 10 11 12



Nagyságrend - for művelet

1, Bizonyítás az állításra

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) = O(g(x))$$

$$\rightarrow f(x) \leq c \cdot g(x) \quad \forall x > n$$

$$0 \leq x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$c = 4$$

$$n = 1$$

$$n > 1$$

$$g(x) = x^2$$

$$2, f(x) = 7x^2$$

$$f(x) = O(g(x))$$

$$\rightarrow f(x) \leq c \cdot g(x) \quad \forall x > x_0$$

$$0 \leq 7x^2 \leq 7x^3$$

$$c = 7$$

$$x_0 = 1$$

$$x > 1$$

$$g(x) = x^3$$

$$3, f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 7$$

$$f(x) = O(g(x))$$

$$f(x) \geq c \cdot g(x) \quad \forall x > x_0$$

$$8x^3 + 5x^2 + 7 \geq 8x^3$$

$$g(x) = x^3$$

$$c = 7$$

$$x_0 = 0$$

$$x > 0$$

$$4, f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

$$g(x) = x$$

$$f(x) = O(g(x))$$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)+2}{(x+1)} = x - 1 + \frac{2}{(x+1)} \leq c \cdot x$$

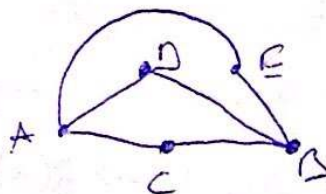
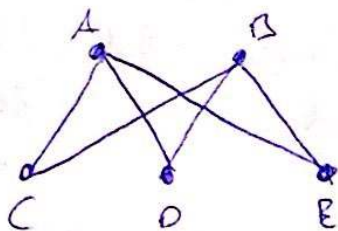
$$x > 1$$

$$c = 1$$

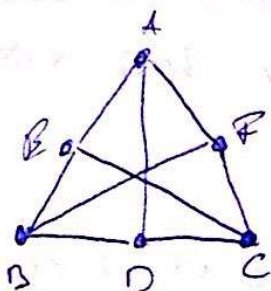
$$x_0 = 1$$

Sírhá rajzoltató graífol

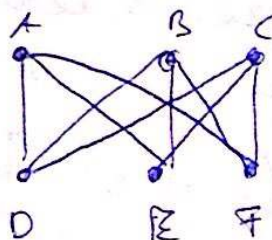
1,



2,



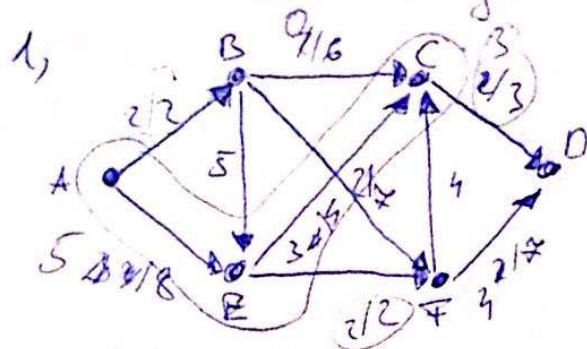
→



Háromszög a $K_{3,3}$ graífol → Kétszínű
tétel alapján
nem sírhá rajzolt

Kalcszato folyamat

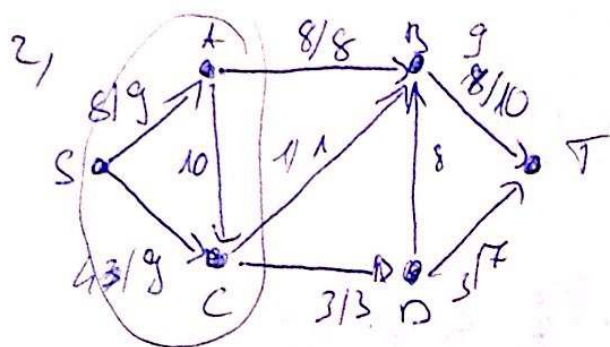
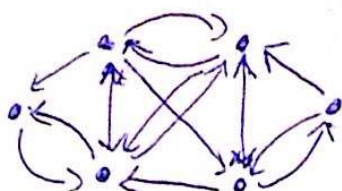
Ford-Fulkerson algoritmus hasznalata



$$\begin{aligned} ABCD &+ 2 \\ AEED &+ 2 \\ AECD &+ 1 \\ \hline AECEED &+ 2 \end{aligned}$$

Max Flow

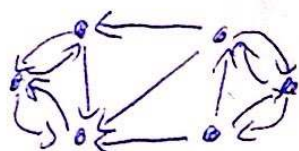
$$\text{Min Cut} = 4 \quad \checkmark$$



$$\begin{aligned} SAT &+ 8 \\ SCT &+ 3 \\ SCT &+ 1 \\ \hline 12 \text{ MF} \end{aligned}$$

12 MF

$$\text{MC} \rightarrow 12$$



Készendű logika

1, Famalivalás

① Axi átmonta utasgán és nyert, az boldog
 $A(x) : x \text{ átment}$ $Ny(x) : x \text{ nyert}$ $B(x) : x \text{ boldog}$

$$\forall x [(A(x) \wedge Ny(x)) \rightarrow B(x)]$$

② Minden ember halandó és szeret tudni
 $M(x) : x \text{ ember}$ $H(x) : x \text{ halandó}$ $T(x) : x \text{ szeret tudni}$

$$\forall x [M(x) \rightarrow (H(x) \wedge T(x))]$$

③ Axi tanul vagy szerencsés az átmege a utasgán
 $T(x) : x \text{ tanul}$ $Sz(x) : x \text{ szerencsés}$ $A(x) : x \text{ átmege}$

$$\forall x [(T(x) \vee Sz(x)) \rightarrow A(x)]$$

2, Prenex - Skolem

↳ cserk # skolem

$$\textcircled{1} \exists x [\exists y (B(x,y) \wedge P(y)) \rightarrow \forall y \exists z G(x,y,z)]$$

- 1, simplifikációs átírás
- 2, kvantor átírás
- 3, kvantor renevelés

$$\exists x [\neg \exists y (B(x,y) \wedge P(y)) \vee \forall y \exists z G(x,y,z)]$$

$$\exists x [\forall y (\neg B(x,y) \vee \neg P(y)) \vee \forall y \exists z G(x,y,z)]$$

$$\exists x \forall y_1 \forall y_2 \exists z (\neg B(x,y_1) \vee \neg P(y_1) \vee G(x,y_2,z))$$

4, KNF-ne hozzuk

Skolem

$$x \rightarrow c \quad z \rightarrow f(y_1, y_2)$$

$$\forall y_1 \forall y_2 [\neg B(c, y_1) \vee \neg P(y_1) \vee G(c, y_2, f(y_1, y_2))]$$

$$\textcircled{2} \forall x \exists y \exists z [(\neg P(x,y) \vee R(x,y,z)) \wedge (Q(x,z) \vee R(x,y,z))]$$

$$y \rightarrow f(x) \quad z \rightarrow g(x)$$

$$\forall x [(\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), g(x)))]$$

$$\textcircled{3} \forall x [\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg (Q(y) \rightarrow P(x,a))] \rightarrow \neg \forall x \exists y [P(y,x) \rightarrow R(x,y)] \equiv$$

$$\equiv \neg \forall x [\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg (\neg Q(y) \vee P(x,a))] \vee \neg \forall x \exists y [\neg P(y,x) \vee R(x,y)] \equiv$$

$$\equiv \exists x \neg [\neg \forall y P(x,y)] \vee \dots$$

3. Realizáció

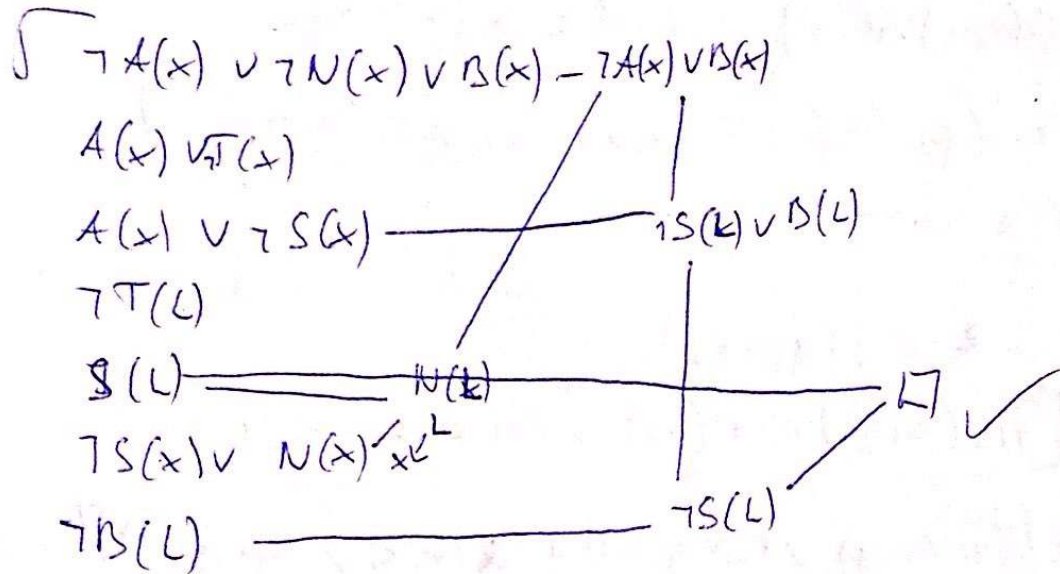
I. $\neg A(x) \vee \neg N(x) \vee B(x)$

II. $(\neg T(x) \wedge \neg S(x)) \vee A(x) \equiv (A(x) \vee \neg T(x)) \wedge (A(x) \vee \neg S(x))$

III. $\neg T(L) \wedge S(L)$

IV. $\neg S(x) \vee N(x)$

V. $B(L) \rightarrow$ Következik.



Számszám